| | |
|---|---|
| Title | Fuchs型偏微分方程式におけるFrobeniusの方法 (微分方程式と超函数) |
| Author(s) | 田原, 秀敏 |
| Citation | 数理解析研究所講究録 (1976), 281: 176-191 |
| Issue Date | 1976-10 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/106051 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

数理解析研究所講究録
281巻 1976年 176-191


# Fuchs型偏微分方程式における Frobeniusの方法.

上智大 理工 田原秀敏.

複素領域における常微分方程式論の中で、最も基礎的なものといえば、正則解の存在に関する Cauchyの定理、及び、退化した場合の、確定特異点、不確定特異点の理論等であろう。これ等に対応する結果を、偏微分方程式論の中で捜してみるに、正則解の存在に関しては、Cauchy-Kowalevskyの定理があるものの、退化した場合の、確定、不確定特異点の結果に対応するものは、あまり見あたらない。

しかし、常微分方程式の場合に展開された方法、議論は、かなり Natural なものが多く、見る視点を変えて考えると、そのまま偏微分の場合に迄 通用しうるものも 少なくない。

本稿では、確定特異点の場合に、その特異点のまわりでの局所解の構造について、常微分の場合とまったく同様の結果を、いわゆる"Fuchs型偏微分方程式"の場合に導びく。それによって、常微分方程式も偏微分方程式も、確定特異点

の近傍での局所構造については、大差ないのだ、ということが、理解されるであろう。
（なお、不確定特異点の場合については、本稿では一切とり扱わない。今後に待たれたい。）

## §§1. 問題と結果。

$m$ 階の偏微分作用素 $P(t,x,D_t,D_x)$ （正則函数を係数）：

$$P(t,x,D_t,D_x) = t^k D_t^m + P_1(t,x,D_x) t^{k-1} D_t^{m-1} + \cdots + P_k(t,x,D_x) D_t^{m-k} + \cdots + P_m(t,x,D_x)$$

で、次の条件を満たすものを考える。$(t,x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$，

(A-i) $\quad 0 \leqq k \leqq m$

(A-ii) $\quad \mathrm{order}\ P_j(t,x,D_x) \leqq j \qquad 1 \leqq j \leqq m$

(A-iii) $\quad \mathrm{order}\ P_j(0,x,D_x) \leqq 0, \qquad 1 \leqq j \leqq k$，

条件 (A-iii) より $P_j(0,x,D_x) = a_j(x)$ $(1 \leqq j \leqq k)$ と書ける。この時、$P$ に対する決定方程式 $\mathcal{C}(\lambda,x)$ を、次で定義する。

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(\lambda,x) &= \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1) + a_1(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+2) + \cdots \\ &\quad \cdots + a_k(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1) \\ &= (\lambda)(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1)(\lambda-\rho_1(x))\cdots(\lambda-\rho_k(x)).\end{aligned}$$

方程式 $\mathcal{C}(\lambda,x) = 0$ の根，$\lambda = 0, 1, \cdots, m-k-1, \rho_1(x), \cdots, \rho_k(x)$ を、$P$ の決定根と呼ぶ。

上の様な作用素を $t$ に関し Weight $(m-k)$ の Fuchs 型偏微分作用素と呼ぶ. 詳しい性質については、Baouendi-Goulaouic [1]、田原[2][3][4] を参照されたい。特に $P$ は $\{t=0\}$ 上に、確定特異点をもつ事に注意されたい.

$$\tilde{\mathcal{O}} = \{\text{高々 } \{t=0\} \text{ にのみ特異点をもつ多価正則函数の芽の全体（原点の近傍）}\}$$

[問題] $P(t,x,D_t,D_x) : \tilde{\mathcal{O}} \longrightarrow \tilde{\mathcal{O}}$ の構造を決定せよ.

[結果] "$\rho_i(0),\ \rho_i(0)-\rho_j(0) \notin \mathbb{Z}$. $(1 \leq i \neq j \leq k)$" を仮定すると

(i) $\mathrm{Coker}\, P \cong 0$.

(ii) $\mathrm{Ker}\, P \cong {}'\mathcal{O}^m$

但し ${}'\mathcal{O}$ は $x$ のみの正則函数芽全体 (at 原点). 更に (ii) の同型は次で与えられる. つまり、次の (0)〜(3) を満たす様な正則函数 $K_1(t,x,y), \cdots, K_m(t,x,y)$ が存在する.

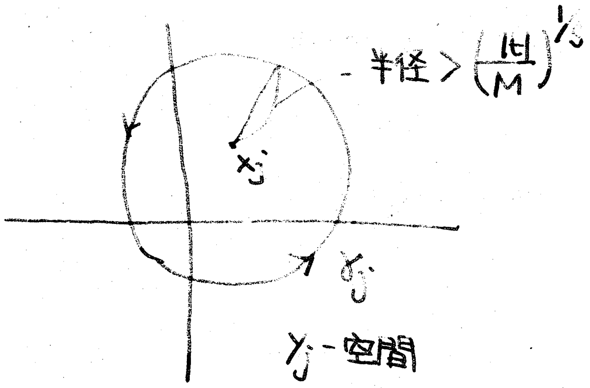
(0) $K_j(t,x,y)$ は次の領域での多価正則函数である.

$$U = \{(t,x,y) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n ;\ |t|, |x|, |y| < \varepsilon,\ 0<|t|<M|x_i-y_i|^s \ (i=1,\cdots,n),\ \text{但し } s=\min(m,k+1)\}.$$

(1) 任意の $\varphi_j(x) \in {}'\mathcal{O}$ に対して、$u(t,x)$ を次の様におく.

$$u(t,x) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_1\times\cdots\times\gamma_n} K_j(t,x,y)\,\varphi_j(y)\,dy.$$

但し積分は右図の様な途にそって線積分を行なう.




この時 $u \in \tilde{\mathcal{O}}$ で、かつ、$P(t,x,D_t,D_x)\,u(t,x) = 0$ が成立つ.

(2) 逆に、$u \in \tilde{\mathcal{O}}$, $Pu = 0$ ならば、適当な $(\varphi_j)_{1 \le j \le m} \in \mathcal{O}^m$ によって (1)の積分の形にかける.

(3). (1)の表わし方は、一意的である.

この(0) 〜(3)より(ii)の同型は得られる。今別の $H_j(t,x,y)$, $(1 \le j \le m)$ で(0)〜(3)を満たすものをとるとする、この時 条件(2)(3)より、任意の解 $u \in \tilde{\mathcal{O}}$, $Pu = 0$ は、

$$u = \sum_{j=1}^{m} \oint K_j(t,x,y)\,\varphi_j(y)\,dy = \sum_{j=1}^{m} \oint H_j(t,x,y)\,\psi_j(y)\,dy$$

とかける.

この時、$(\varphi_j)$ と $(\psi_j)$ とは、適当な微分作用素(無限階)を成分とする可逆行列 $G(x,D_x)$ ($K$ と $H$ のみに依存)によって

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} = G(x,D_x) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}$$

と表わされる.

従って、上の(0)〜(3)をみたす $\{K_j\}$ を、$\tilde{\mathcal{O}}$-解の基本系と呼んでさしつかえない。 基本系の標準的な構成法は、次の

様は Frobenius の方法の拡張した方法によって得られる.

(Frobenius の方法による具体的な解の構成法).

① 決定根 $\lambda=0,1,2,\cdots,m-k-1$ に対する解の構成.

これは定数だから,どんな方法でもよい.常微分方程式の場合の整数差が表われる場合の Frobenius の方法を適用しても良いし,或いは Baouendi-Goulaouic [1] の様に Cauchy 問題として考えても良い.後者の方法で述べると次の様になる。

$$K(t,x,y)=\sum_{j=0}^{\infty}c_j(x,y)\,t^j$$

と Taylor 級数におく.作用素 $P(t,x,D_t,D_x)$ も Taylor 級数に展開して. $P(t,x,D_t,D_x)=\sum_{k=0}^{\infty}t^k P^{(k)}(x,D_t,D_x)$ とおく。

今具体的に計算すると.

$$P(t,x,D_t,D_x)\,K(t,x,y)$$
$$=\left[e(m-k,x)\,c_{m-k}-d_{m-k}\right]+\left[e(m-k+1,x)\,c_{m-k+1}-d_{m-k+1}\right]t$$
$$+\cdots+\left[e(\lambda,x)\,c_\lambda-d_\lambda\right]t^{\lambda-m+k}+\cdots\cdots$$

という級数が得られ.各 $d_\lambda(x,y)$ は $c_j(x,y)$ $(0\leq j\leq\lambda-1)$ のみに依存している.(当然 $c_j(x,y)$ の微分したものを含む。).

決定根 $\rho_i(0)$ に対する仮定より.各 $e(\lambda,x)$ $(\lambda\in\mathbb{Z},\ \lambda\geq m-k)$ は可逆故. $P\cdot K=0$ となる様に.各 $c_\lambda$ $(\lambda\geq m-k)$ を.

$c_\lambda(x,y)=\dfrac{d_\lambda(x,y)}{e(\lambda,x)}$ と順次決めてゆける。自由に決められるのは. $c_0(x,y),\cdots,c_{m-k-1}(x,y)$ である。そこで. Cauchy

データとして.
$$\begin{cases} C_\nu(x,y) = \delta_{\nu j}\delta(x-y) & 0 \le \nu, j \le m-k-1 \\ \delta(x-y) = \dfrac{(-1)^n}{(2\pi i)^n}\dfrac{1}{(x_1-y_1)}\times\cdots\times\dfrac{1}{(x_n-y_n)} \end{cases}$$

とおいたものを $K_j(t,x,y)$ ($0 \le j \le m-k-1$) とおく. この時 $K_j(t,x,y)$ は領域 $U$ で絶対収束する. ($t=0$ も含めて). 収束性の証明は 田原 [2]. [3] の matrix の Fuchs 系に関する Cauchy-Kowalevsky の定理を使えばよい。

②決定根 $\lambda = \rho_i(x)$ に対する解の構成. ($1 \le i \le k$)

まず最初に $e(\rho_i(0)+\lambda; 0) \ne 0$ $\lambda \ge 1$, $\lambda \in \mathbb{Z}$ が成り立つ事に注意しておこう. この場合は常微分方程式論の Frobenius の方法といわれている考え方を運用する。つまり.

$$K(t,x,y) = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell(x,y)\, t^{\lambda+\ell}$$

という級数を考え. $\lambda$ をパラメーターとしてとらえる事である. ①の場合と同様に $P(t,x,D_t,D_x)$ を作用させて展開すると.

$$\begin{aligned} & t^{m-k}\cdot P(t,x,D_t,D_x)\, K(t,x,y) \\ &= e(\lambda,x)C_0(x,y)\,t^\lambda + [e(\lambda+1,x)C_1 - d_1]\,t^{\lambda+1} + \cdots \\ &\quad + \cdots + [e(\lambda+\ell,x)C_\ell - d_\ell]\,t^{\lambda+\ell} + \cdots\cdots \end{aligned}$$

と書ける. ここで $d_\ell$ は $C_j$ ($0 \le j \le \ell-1$) のみに依存したもの (当然 $C_j$ の微分は含む.) である。ここで各. $C_\ell(x,y)$ ($\ell \ge 1$) を $\lambda$ の rational function として. ①と同じく.
$$C_\ell(x,y;\lambda) = d_\ell(x,y;\lambda)/e(\lambda+\ell;x)$$
と決める.

すると.
$$t^{m-k}P(t,x,D_t,D_x)K(t,x,y) = e(\lambda,x)\,C_0(x,y)\,t^{\lambda}$$

を得る。ここで、パラメーター $\lambda$ に $\lambda=\rho(y)$（注：$x$ではなく、$y$-変数!!）を代入する。$e(\rho(0)+\lambda,0)\neq 0$ $\lambda\in\mathbb{Z}$. $\lambda\geq 1$ だから $C_\ell(x,y)$ は. well definedである。更に $C_0(x,y)=\delta(x-y)$ とおく.
この時. $K(t,x,y)$ が. ひで収束する事は、①と同様 田原[2][3] の定理を使えばよい. 要するに評価だけの問題である.
よって.
$$t^{m-k}P\cdot K = e(\rho(y);x)\,\delta(x-y)\,t^{\rho(y)}$$

を得た。今 $u(t,x)=\oint K(t,x,y)\varphi(y)\,dy$ とおく。この時.
$$t^{m-k}Pu = \oint(t^{m-k}P\cdot K)(t,x,y)\varphi(y)\,dy$$
$$= \oint e(\rho(y);x)\,\delta(x-y)\,t^{\rho(y)}\varphi(y)\,dy$$
ここで、次の事に注意しよう. $x=y$ のまわりで Taylor展開すると
$$e(\rho(y),x) = (*)(\rho(x)-\rho(y))$$
$$= (*)_1(x_1-y_1) + (*)_2(x_2-y_2)+\cdots+(*)_n(x_n-y_n)$$
$(*)_*$ は. holomorphic function
従って. 例えば $(*)_1(x_1-y_1)$ について. みると.
$$\oint(*)_1(x_1-y_1)\,\delta(x-y)\,t^{\rho(x)}\varphi(y)\,dy = 0$$
を得る。それは. $\delta(x-y)$ の定義より. 被積分項が. $y_1$ に関し. $x_1$の近傍で正則となり. Cauchyの公式より $=0$ を得る次第で

である．故に $t^{m-k}Pu=0$．即ち $Pu=0$ を得る。確かに上で構成した $K(t,x,y)$ は，性質(1)をみたしている。

以上によって，各決定根に対応する基本解を具体的に構成したが，それ等 $m$ 個が，解の基本系をなす。（⇐ これが，常微分方程式の場合の自然な拡張になっている．）．

P3の中段から，ここ迄が，［問題］に対する我々の［結果］の陳述である．

なお，" $\rho_i(0),\ \rho_i(0)-\rho_j(0)\in\mathbb{Z}-\{0\}$ $1\le i,j\le k$ " の仮定のもとでも，同様の結果が成り立つ．しかし，標準的な基本系（基本解）の構成方法は，まだ，分からない．形式的に，Frobeniusの方法の拡張で基本解らしきものを構成できるが，上の(1)～(3)の意味で基本系をなすかどうか，証明できないでいる．

更に，実際に整数差が表われる場合，解の基本系の存在すら，目下の所不明である．

## §§2. 常微分方程式論からの推論．

上の［結果］の証明の概略を述べる前に，常微分方程式論の議論を，どの様に捕えているのか，という事を少し説明して

おこう．簡単の為，$k=m$ で考える。

$$P(t,D_t)=t^mD_t^m+a_1(t)t^{m-1}D_t^{m-1}+\cdots\cdots+a_m(t).$$

$t=0$ での決定方程式の根を $\rho_1,\cdots,\rho_m\in\mathbb{C}$．更に $\rho_i-\rho_j\notin\mathbb{Z}$ $(i\neq j)$ としておこう．すると．§§1の様に $\sum C_n t^{\lambda+n}$ $(\lambda=\rho)$ と展開する事により．解の基本系 $\{u_j(t)=V_j(t)t^{\rho_j}\}_{1\leq j\leq m}$ を得る．$V_j(0)=1$ とする．

所で方程式 $Pu=0$ は．$w^{(i)}=tD_t\cdot(tD_t-1)\cdots(tD_t-i+1)u$ $(1\leq i\leq m)$ により．次の様に行列表示できる．

$$(*)\ \left(tD_t-\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 1, & & \\ \vdots & & 2 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ -a_m(t), & -a_{m-1}(t), & \cdots, & & -a_1(t)+m-1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}w^{(1)}\\ w^{(2)}\\ \vdots\\ \vdots\\ w^{(m)}\end{bmatrix}=0.$$

今 $u_j=V_j(t)t^{\rho_j}$ について考えると．$tD_t(tD_t-1)\cdots(tD_t-i+1)u_j(t)=(tD_t+\rho_j)(tD_t+\rho_j-1)\cdots(tD_t+\rho_j-i+1)V_j(t)\times t^{\rho_j}$ となる。故に．

$$\Lambda_i(\rho)=(tD_t+\rho)(tD_t+\rho-1)\cdots(tD_t+\rho-i+1)$$

とおくと．

$$(tD_t-A(t))\cdot\begin{bmatrix}V(t)\\ \Lambda_1(\rho)V(t)\\ \Lambda_2(\rho)V(t)\\ \vdots\\ \Lambda_{m-1}(\rho)V(t)\end{bmatrix}\times t^{\rho}=0$$

(但し．$A(t)$ は．$(*)$ の matrix を意味する。)

解のベクトルを $\mathbb{V}(t)t^{\rho}$ とおく。すると上の方程式は．

$$t\frac{d}{dt}\mathbb{V}(t)\cdot t^{\rho}+\rho\cdot\mathbb{V}(t)\cdot t^{\rho}-A(t)\cdot\mathbb{V}(t)\,t^{\rho}=0.$$

を意味する．両辺を $t^\rho$ で割ると次を得る．

$$(**)\quad t\cdot\frac{d}{dt}\mathbb{V}(t) - A(t)\,\mathbb{V}(t) = -\rho\cdot\mathbb{V}(t) = \mathbb{V}(t)\,(-\rho).$$

各 $\rho_j$ に対して．上の $\mathbb{V}(t)$ を作って．$\mathbb{V}_j(t)$ とおく。縦ベクトルを並べて．

$$\mathcal{V} = (\mathbb{V}_1, \cdots, \mathbb{V}_m) = \begin{bmatrix} v_1(t), & \cdots, & v_m(t) \\ \Lambda_1(\rho_1)v_1(t), & & \Lambda_1(\rho_m)v_m(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \Lambda_{m-1}(\rho_1)v_1(t), & & \Lambda_{m-1}(\rho_m)v_m(t) \end{bmatrix}$$

なる行列を定義する．

$$\mathcal{V}(0) = \begin{bmatrix} 1, & \cdots, & 1, \\ \rho_1, & & \rho_m, \\ \rho_1(\rho_1-1), & & \rho_m(\rho_m-1) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_1(\rho_1-1)\cdots(\rho_1-m+1), & & \rho_m(\rho_m-1)\cdots(\rho_m-m+1) \end{bmatrix}$$

$$\det\mathcal{V}(0) = \prod_{i>j}(\rho_i - \rho_j)$$

従って．$\rho_i - \rho_j \neq 0\ (i \neq j)$ ならば．$\mathcal{V}$ は原点の近傍で可逆である．更に $(**)$ より．

$$t\frac{d}{dt}\mathcal{V}(t) - A(t)\,\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}(t)\begin{bmatrix} -\rho_1 & & & \\ & -\rho_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\rho_m \end{bmatrix}$$

を満たす。

ここで $\mathcal{V}(t)$ を函数としてではなく，0 階の微分作用素として考えてみる。すると $t\frac{d}{dt}\cdot\mathcal{V}(t) = tD_t\cdot\mathcal{V}(t) - \mathcal{V}\cdot tD_t$ を得る．従って．

$$\left(tD_t - A(t)\right)V(t) = V(t)\cdot\left(tD_t + \begin{bmatrix} -\rho_1 & & & \\ & -\rho_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\rho_m \end{bmatrix}\right)$$

を得る。$V(t)$ は可逆だから、結局、方程式 $(tD_t - A(t))u = 0$ は、$(tD_t - \rho_j)w_j = 0$ の直和に変換されたことになる。

従って、$\sum_\ell c_\ell t^{\lambda+\ell}$ と展開して解の基本系を構成するというのは、実は、上の様な簡単な方程式に変換する時の、変換行列を構成している事に他ならない。

以上の常微分方程式論と同様の考え方で、§§1で構成した解の基本系を使って、うまく上の様な変換を行ない、その結果、$(tD_t - \rho_i(x))v_i = 0$ なる形の方程式に、もってゆければ、$\mathcal{O}$ での構造は、すぐ得られる。つまり、$\mathrm{Coker}\,(tD_t - \rho_i(x)) = 0$、$\mathrm{Ker}\,(tD_t - \rho_i(x)) = {}^{\prime}\mathcal{O}$、具体的には $u = \varphi(x)t^{\rho_i(x)}$ だからである。従って、[結果] の証明の為には、次の各段階を実行してゆけばよい。

[第1段]、$\mathcal{O}$ の作用環となる様な環の設定。（常微分では、$V(t) \in GL(m, \mathcal{O})$ 故、$\mathcal{O}$ が、それに当たる。）

[第2段]、変換が、実際に実現できることの証明。

以下、それ等について説明してゆこう。

## §§3. 証明の概略.

簡単の為、ここでも $k=m$ として話を進める. この時 §§1 で構成した基本解は、$K(t,x,y)=L(t,x,y)\,t^{\rho(y)}$ なる形をしており、$L(t,x,y)$ は $t$ に関しては正則かつ、次の領域で正則となっている.

$$\{(t,x,y)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n;\ |t|,|x|,|y|<\varepsilon,\ |t|<M|x_i-y_i|^s\ \ i=1,\cdots,n\}.$$

§§2 の推論を形式的に実行してみよう.

$$(3\text{-}1)\quad A(t,x,D_x)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 2 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ -P_m(t,x,D_x), & \cdots & \cdots & , & -P_1(t,x,D_x)+m-1 \end{bmatrix}$$

$$V(t,x,y)={}^t(L(t,x,y),\ \Lambda_1(\rho(y))L(t,x,y),\ \cdots,\ \Lambda_{m-1}(\rho(y))L(t,x,y))$$

とおく. $P\cdot K=e(\rho(y);x)\,\delta(x-y)\,t^{\rho(y)}$ より

$$(tD_t-A(t,x,D_x))\ V(t,x,y)\cdot t^{\rho(x)}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0, \\ e(\rho(y);x)\,\delta(x-y) \end{bmatrix} t^{\rho(x)}.$$

右辺を $f(x,y)\,t^{\rho(y)}$ とおく。 §§1 より $\oint f(x,y)\,t^{\rho(y)}\varphi(y)\,dy=0$ が、任意の $\varphi\in\mathcal{O}$ に対して成り立つ。 $t^{\rho(y)}$ で割ると

$$(3\text{-}2)\quad t\frac{\partial}{\partial t}V(t,x,y)+\rho(y)V(t,x,y)-A(t,x,\partial_x)V(t,x,y)=f(x,y)$$

故に、今

$$V(t,x,y)={}^t(V_1,\cdots,V_m)\qquad \left(\partial_x V=\frac{\partial}{\partial x}V\ のこと\right).$$

とおくと、次の関係式が成り立つ.

$$(3\text{-}3).\quad (tD_t - A(t,x,\partial_x))V(t,x,y) = V(t,x,y)\left(tD_t - \begin{bmatrix} \rho_1(y), & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_m(y) \end{bmatrix}\right) + (f_1, \cdots, f_m).$$

この辺から常微分方程式と若干の相異が出てきた．§§1の解の具体的な積分表示をあわせ考えると，変換行列は $V(t,x,y)$ そのものではなく，$V(t,x,y)\,dy$ という積分作用素とするべきであろう．微分作用素を積分作用素として Cohomological に定義できる事を思い出すと，次の様な環を導入するのが最も自然であろう．

$$\mathcal{U}_{\varepsilon,M}^{(j)} = \{(t,x,y)\,;\ |t|+|x|+|y|<\varepsilon,\ |t|<M|x_i-y_i|^s \quad i \neq j\}$$

$$\hat{\mathcal{U}}_{\varepsilon,M} = \bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{U}_{\varepsilon,M}^{(j)}.$$

$$\hat{\mathcal{D}}(s) = \underset{M\to 0}{\text{ind-lim}}\left\{\underset{\varepsilon\to 0}{\text{ind-lim}}\left(\frac{\mathcal{O}(\hat{\mathcal{U}}_{\varepsilon,M})}{\bigoplus_{j=1}^{n}\mathcal{O}(\mathcal{U}_{\varepsilon,M}^{(j)})}\right)\otimes dy\right\}$$

この $\hat{\mathcal{D}}(s)$ が ring structure をもち，かつ $\hat{\mathcal{O}}$ の Operation-ring となる事は，$\mathcal{U}_{\varepsilon,M}$ etc の領域より明らか．但し作用は，$K_1 \cdot K_2\,dy = (\oint K_1(t\,x\,w)K_2(t\,w\,y)\,dw)\,dy$，$K\cdot\varphi = \oint K(t\,x\,y)\varphi(y)\,dy$ によって定義するのは，微分作用素の時と同様である．

ちなみに，§§1で使った

$$\oint e(\rho(y);x)\,\delta(x-y)\,t^{\rho(y)}\varphi(y)\,dy = 0$$

という関係式は，$e(\rho(y);x)\,\delta(x-y)\,dy \equiv 0$ in $\hat{\mathcal{D}}(s)$ に由来している．

ここで、次の事に注意しよう.

(イ) $f_j(x.y)\,dy \equiv 0$ in $\hat{\mathcal{D}}(s)$

(ロ) $A(t.x.D_x)\cdot(V(t.x.y)\,dy) = (\oint A(t.x\,\partial_x)\,\delta(x-w)V(t\,w\,y)\,dw)\,dy$

$= (A(t.x.\partial_x)V(t.x.y))\,dy.$

(ここで. 微分作用素 $A(t.x.D_x)$ は積分作用素として $A = A(t.x.\partial_x)\delta(x-y)\,dy$ と表わされる事を使って積・を計算している. $\hat{\mathcal{D}}(s) \supset \mathcal{D}$ に注意せよ。)

(ハ) $(V(t.x.y)\,dy)\cdot\rho(x) = (V(t.x.y)\,dy)\cdot(\rho(x)\,\delta(x-y)\,dy)$

$=(V(t\,x\,y)\,dy)\cdot(\rho(y)\,\delta(x-y)\,dy)$

$= (\oint V(t.x.w)\,\rho(y)\,\delta(w-y)\,dw)\,dy$

$= (\rho(y)\cdot V(t\,x\,y))\,dy.$

従って, (3-2) の両辺に dy を掛けて $\hat{\mathcal{D}}(s)$ の中で考えると (3-3) は次の様に書きかえられる.

(3-4). $$(tD_t - A(t.x.D_x))(V(t\,x\,y)\,dy) = (V(t\,x\,y)\,dy)\left(tD_t - \begin{bmatrix}\rho_1(x), & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_m(x)\end{bmatrix}\right)$$

(但し積はすべて $\hat{\mathcal{D}}(s)$ の中での意味!!).

§§2 の. 常微分の場合と類似の変換式を導びく事ができた. 残り. $V(t.x.y)\,dy \in GL(m.\hat{\mathcal{D}}(s))$ なる事 i.e 可逆なる事を示せばよい。

$$V(t.x.y)\,dy\Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots, & 1 \\ \rho_1(x), & & \rho_m(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \rho_1(x)\cdots(\rho_1(x)-m+1), & & \rho_m(x)\cdots(\rho_m(x)-m+1)\end{bmatrix}\delta(x-y)\,dy.$$

故. $V(t.x.y)dy|_{t=0}$ は $\hat{\mathcal{D}}(s)$ の意味で.可逆である. $\mathcal{V}$ の可逆性を示す為.逆行列も具体的に構成してしまおう.

今 $k=m$ としていた. $P(t.x.D_t.D_x)$ の formal adjoint 作用素を $P^*(t.x.D_t.D_x)$ とおく。 この時. $P^*$ も Fuchs型偏微分作用素となり.その決定方程式は. $e^*(\lambda.x)=e(-\lambda-1,x)$ となる.
故に. $P^*$に対しても.同様にFrobeniusの方法(§§1 の方法)で. $m$ 個の解を構成できる.それを使って.上と同様のプロセス を実行する事により.

$$(3\text{-}5)\quad (W(t.x.y)dy)(tD_t-A(t.x.D_x)) = \left(tD_t-\begin{bmatrix}\rho_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_m(x)\end{bmatrix}\right)(W(t.x.y)dy)$$

なる行列 $W(t.x.y)dy \in M(m\times m,\hat{\mathcal{D}}(s))$ を構成できる.
$\rho_i(0)$ に関する条件より $W(t.x.y)dy|_{t=0} \in GL(m,\hat{\mathcal{D}}(s))$ も同様である.正規化して.$(V|_{t=0})(W|_{t=0})=1$ としておく.

この時. $\mathcal{V}\cdot\mathcal{W}=\mathcal{W}\cdot\mathcal{V}=1\ (\equiv\delta(x-y)dy)$ が $\hat{\mathcal{D}}(s)$ の積の意味で成り立つ.それは.次の様にして示される.

(3-4),(3-5)より

$$(3\text{-}6)\begin{cases}(tD_t-A(t.x.D_x))(\mathcal{V}\cdot\mathcal{W})=(\mathcal{V}\cdot\mathcal{W})(tD_t-A(t.x.D_x))\\ (tD_t-A^0(x))(\mathcal{W}\mathcal{V})=(\mathcal{W}\cdot\mathcal{V})(tD_t-A^0(x))\end{cases}$$

$$\left(A^0=\begin{bmatrix}\rho_1(x) & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_m(x)\end{bmatrix}\ とおく。\right)$$

が成り立つ.更に $VW|_{t=0}=WV|_{t=0}=1$ in $\hat{\mathcal{D}}(s)$.

tに関するTaylor展開で各$t^k$の係数を比較する事により，(3-6)の方程式はともに，Cauchyデータ によって一意的に決まることがわかる．$(V\cdot W)|_{t=0}=(W\cdot V)|_{t=0}=1$ に注意すると，実は，$V\cdot W=W\cdot V=1$ in $GL(m, \mathcal{D}(\omega))$ の成り立つことが得られる．故に$V$は可逆であり，(3-4)の変換が実現された．これが〔オ2段〕である．

以上によって，$k=m$の場合の証明をスケッチした．$k$が一般の場合も，殆んど同様である．

## 参考文献


[1] Baouendi-Goulaouic ; Cauchy Problems with Characteristic Initial Hypersurfaces ; Comm. Pure. Appl. Math. 1973, 26 455-475.

[2] 田原 ; Fuchs双曲型方程式の研究 : 東京大学修士論文

[3] 田原 ; Fuchs双曲型方程式 ; 数理研講究録 Vol 248, 「超函数と線型微分方程式 IV」 1975, 19-57.

[4] 田原 ; Fuchs双曲型方程式の超函数解の構造 ; 数理研講究録に近刊の予定．